



Examen (S1)

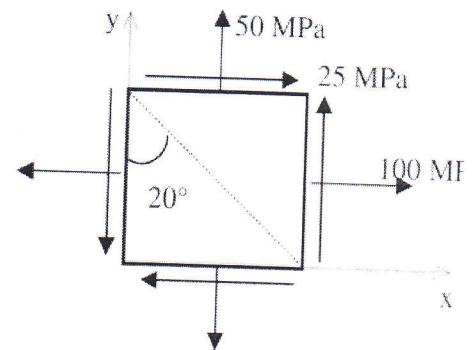
Question (08 point)

- 1- Simplifiez l'équation suivante $\overline{T}_j(M, \vec{e}_j) = \sigma_{ij} \vec{e}_i$
- 2- Quelle est l'état de contraintes est dit (**L'ellipsoïde est une sphère**) ?
- 3- Qu'est-ce qu'une contrainte principale (**avec schéma**) ?
- 4- Quelles sont les invariants qui représentent la déformation quadratique ?
- 5- Comment on mesure la déformation ?
- 6- Pour des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 , définir l'état de contrainte pour les cas suivants :
 - $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq 0$
 - $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
 - $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3$

Exercice N°1 : (6points) (Micro)

L'état de contrainte en point est donné par l'élément infinitésimal suivant :

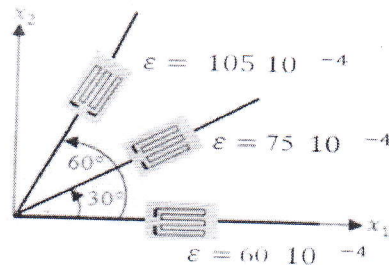
- 1- Calculer les contraintes agissant sur le plan orienté à 20° (voir figure).
- 2- Calculer l'état de contrainte principale et son orientation.
- 3- Calculer l'état de cisaillement maximum ainsi que sa contrainte associée et son orientation.
- 4- Dessiner les éléments orientés dans chaque cas. Vérifier tous vos résultats en utilisant la méthode graphique du cercle MOHR.



Exercice N°2 : (6 points)

On considère une plaque carrée (OABC) de cote $a=80\text{cm}$, soumise à un champ de déformations uniforme.

A l'aide d'un système de jauges (resette) qui permet de mesurer les déformations unitaires, on lit les valeurs suivantes (voir figure) : les indices désignent les angles par rapport à l'axe Ox_1 .



- 1- Calculer les composantes du tenseur de déformation.
- 2- Déduire les déformations principales et le glissement maximal du tenseur.
- 3- Représenter les résultats en utilisant le cercle MOHR.



Corrigé type

1- Simplifiez l'équation suivante $\vec{T}_j(M, \vec{e}_j) = \sigma_{ij} \vec{e}_i$

$$\vec{T}_1(M, \vec{e}_1) = \sigma_{xx} \vec{e}_1 + \sigma_{xy} \vec{e}_2 + \sigma_{xz} \vec{e}_3$$

$$\vec{T}_2(M, \vec{e}_2) = \sigma_{yx} \vec{e}_1 + \sigma_{yy} \vec{e}_2 + \sigma_{yz} \vec{e}_3$$

$$\vec{T}_3(M, \vec{e}_3) = \sigma_{zx} \vec{e}_1 + \sigma_{zy} \vec{e}_2 + \sigma_{zz} \vec{e}_3$$

$$\vec{T}_j(M, \vec{e}_j) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

2- Quelle est l'état de contraintes est dit (L'ellipsoïde est une sphère) ?

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: toutes les directions sont principales, l'état de contraintes est dit isotrope. L'ellipsoïde est une **sphère**.

3- Que représente une contrainte principale ?

Les trois contraintes principales notées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont des quantités physiques objectives ; cela implique que les coefficients de l'équation sont aussi objectifs appelés les invariants de l'équation. Les **contraintes principales** représentées par des contraintes normales σ_1, σ_2 et σ_3 sont perpendiculaires.

4- Quelle sont les invariants qui représente la déformation quadratique ?

L'invariants qui représente la déformation quadratique c'est : I_1 et I_3 .

5- Comment on mesure la déformation ?

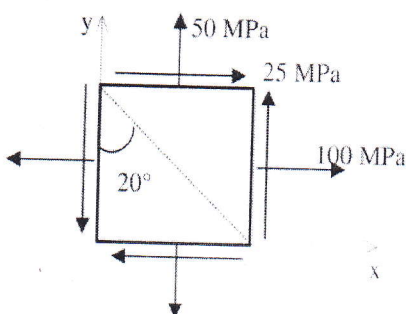
Pour mesurer la déformation normale en un point on utilise les jauges de déformation électrique. Les jauges de déformation électrique sont des filaments électriques fins résistifs de petites dimensions, le filament est bien collé sur la surface suivant la même direction pour recevoir la même déformation.

6- Pour des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 , définir l'état de contrainte pour les cas suivants :

- Si $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$: les trois directions principales sont perpendiculaires entre eux.
- Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: la direction une est bien définie ; toutes les directions du plan perpendiculaires à la direction une sont des directions principales avec la même valeur principale. On dit que l'état de contraintes est de révolution autour de l'axe un. L'ellipsoïde est de **révolution**.
- Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: toutes les directions sont principales, l'état de contraintes est dit isotrope. L'ellipsoïde est une **sphère**.

Solution Exercice N°1 : (6 points)

1- Calculer les contraintes agissant sur le plan orienté à 20° (voir figure).



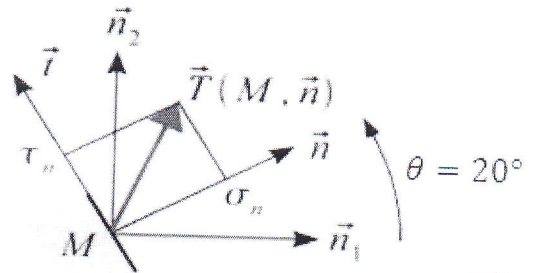
$$\sigma_{xx} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 50 \text{ MPa}$$

$$[\sigma(M)] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 25 \\ 25 & 50 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



La normale $\vec{n}$ du plan orienté de θ , on voit que $\theta = 20^\circ$ qui est utilisé.



- Le vecteur de contrainte : On à :

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} ; \quad \text{Avec}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.939 \\ 0.342 \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = \begin{pmatrix} 100 & 25 \\ 25 & 50 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0.939 \\ 0.342 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 102.450 \\ 40.575 \end{Bmatrix}$$

- Contrainte normale : On à :

$$\sigma_n = \{\vec{T}(M, \vec{n})\}^T \{\vec{n}\} ; \quad \sigma_n = \{102.450 \quad 40.575\} \begin{Bmatrix} 0.939 \\ 0.342 \end{Bmatrix} ; \quad \sigma_n = 110.077 \text{ MPa}$$

- Contrainte tangentielle : On à :

$$\tau_n = \vec{t} \cdot \{\vec{T}(M, \vec{n})\} ; \quad \text{Avec } \vec{t} = \{-\sin\theta, \cos\theta\}^t = \{-\sin 20^\circ \quad \cos 20^\circ\}^t = \{-0.342 \quad 0.939\}^t$$

$$\tau_n = \vec{t} \cdot \{\vec{T}(M, \vec{n})\} ; \quad \tau_n = \{-0.342 \quad 0.939\} \begin{Bmatrix} 102.450 \\ 40.575 \end{Bmatrix} ;$$

$$\tau_n = 3.06 \text{ MPa}$$

2- Calculer l'état de contrainte principale et son orientation.

- Les deux contraintes principales s'obtiennent :

$$|[\sigma(M)] - \sigma_n[I]| = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xz}^2} ; \sigma_1 = 39.64 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xz}^2} ; \sigma_2 = 110.355 \text{ MPa} \end{cases}$$

Par convention ces contraintes sont numérotées telque : $\sigma_1 \geq \sigma_2$

Donc : Les contraintes principales sont : $\sigma_1 = 110.355 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = 39.64 \text{ MPa}$

- Leur orientation :

L'orientation des axes principaux est donnée par : $\tan 2\theta = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xz}} = \frac{100 - 50}{2 \cdot 25} = 1$

$$\theta_p = 26.56^\circ$$

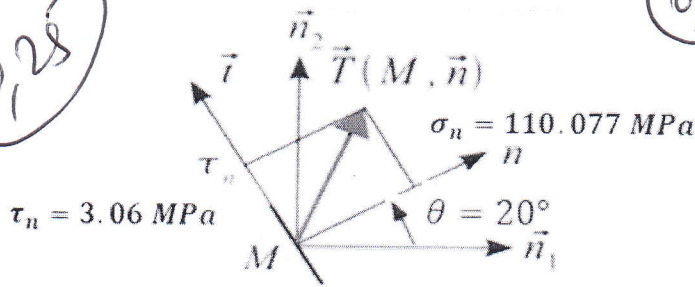
3- Calculer l'état de cisaillement maximum ainsi que sa contrainte associée et son orientation.

- Contrainte tangentielle maximale $\tau_{\text{Max,Min}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm 35.357 \text{ MPa}$.

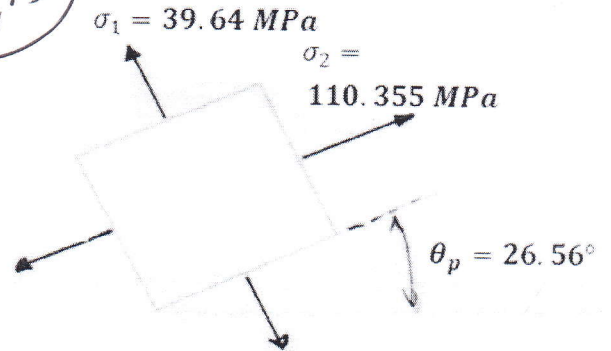
- Contrainte associée $\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 75 \text{ MPa}$



0,25

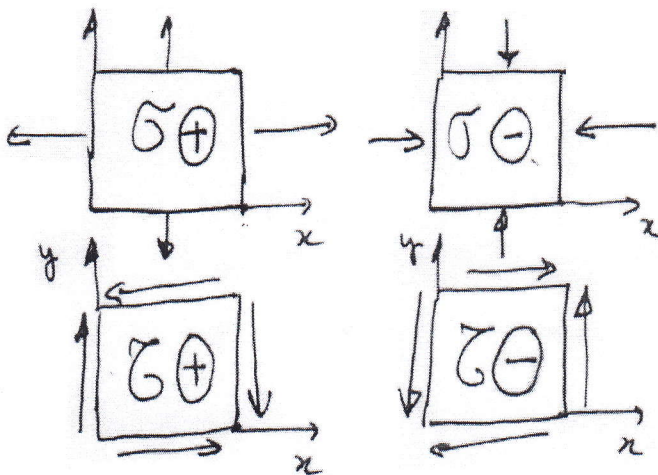


0,25



4- Méthode graphique du cercle MOHR

Quand on utilise la méthode du cercle de MOHR la convention de signe pour la contrainte tangentielle



0,25

Contrainte normale (même convention que pour les méthodes analytiques)

Contrainte tangentielle (signe inverse)

Aussi dans notre cas :



- le centre du cercle est

$$C(C_x, 0) = C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = (75, 0)$$

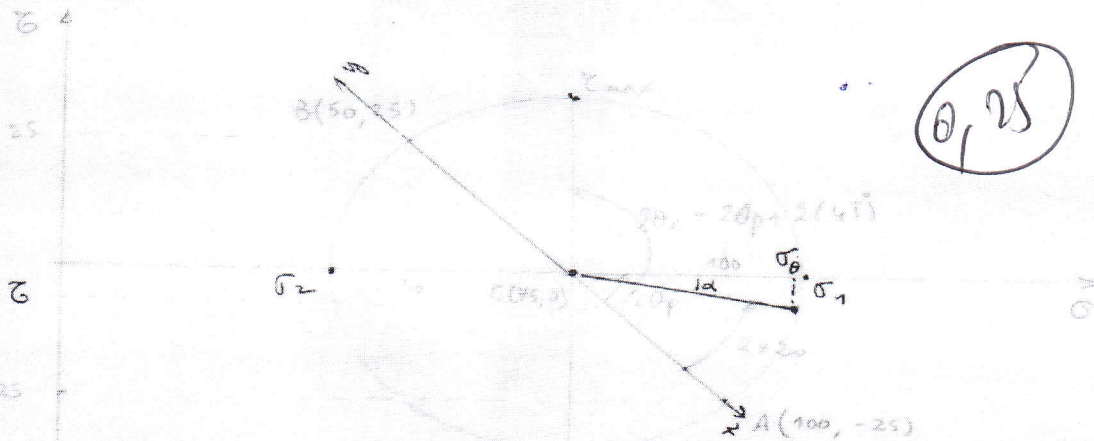
- le point A(σ_x, τ_{xy})

$$\Rightarrow A(100, -25)$$

B($\sigma_y, -\tau_{xy}$)

$$\Rightarrow B(50, +25)$$

on trace le cercle de centre C et de diamètre AB



Rayon du cercle $\rightarrow R^2 = 25^2 + (100 - 75)^2 \rightarrow R = 35,36$

graph. queant $\rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{-25}{100 - 75} = 1 \rightarrow 2\theta_p = 45^\circ$
 $\theta_p = 22,50$

Solution Exercice N°2 : (6 points)

1- Composant du champ de déformation :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

- Direction 0° :

Normale

$$n_0 = (1 \ 0)$$

Dilatation

$$\varepsilon_0 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où : $\varepsilon_0 = \varepsilon_x = 60 \cdot 10^{-4}$

- Direction 30° :

Normale

$$n_{30} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{1}{2}\right)$$

Dilatation

$$\varepsilon_{30} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'où : $4\varepsilon_{30} = 3\varepsilon_x + \varepsilon_y + 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy}$

- Direction 60° :

Normale

$$n_{60} = \left(\frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Dilatation

$$\varepsilon_{60} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$D'où : 4\varepsilon_{60} = \varepsilon_x + 3\varepsilon_y + 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy}$$

On a trois équation est trois inconnues ,après la résolution du système ,on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon_x = 60 \cdot 10^{-4} \\ 4\varepsilon_{30} = 3\varepsilon_x + \varepsilon_y + 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} \\ 4\varepsilon_{60} = \varepsilon_x + 3\varepsilon_y + 2\sqrt{3}\varepsilon_{xy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 60 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_y = 120 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{xy} = 0 \end{cases}$$

Le tenseur de déformation est :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} 10^{-4}$$

2- Les déformations principales :

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les racines de l'équation caractéristiques :

$$\diamond -\lambda^3 + I_{\varepsilon 1}\lambda^2 - I_{\varepsilon 2}\lambda + I_{\varepsilon 3} = 0$$

Avec :

$$\triangleright I_{\varepsilon 1} = 180 \cdot 10^{-4}$$

$$\triangleright I_{\varepsilon 2} = 72 \cdot 10^{-6}$$

$$\triangleright I_{\varepsilon 3} = 0$$

$$\text{Donc : } I_{\varepsilon 1} = 180 \cdot 10^{-4} ; I_{\varepsilon 2} = 72 \cdot 10^{-6} ; I_{\varepsilon 3} = 0$$

$$\diamond -\lambda^3 + 180 \cdot 10^{-4}\lambda^2 + 72 \cdot 10^{-6}\lambda = 0 \dots\dots\dots \text{équation N°1}$$

Cette équation de 3^{ème} ordre la solution de cette équation comme la suite :

$$\diamond (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0 ; \text{ Avec } P(\alpha) = 0 ; \text{ Donc } \alpha = 60 \cdot 10^{-4}$$

$$\diamond P(\alpha = 60 \cdot 10^{-4}) = -(60 \cdot 10^{-4})^3 + 180 \cdot 10^{-4}(60 \cdot 10^{-4})^2 + 72 \cdot 10^{-6}(60 \cdot 10^{-4}) = 0$$

Donc $\alpha = 60 \cdot 10^{-4}$ c'est la solution de cette équation.

Il est possible d'utiliser la méthode d'appariement (استعمال طريقة المطابقة)

$$P(\alpha) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) ; P(60 \cdot 10^{-4}) = (x - 60 \cdot 10^{-4})(ax^2 + bx + c)$$

$$P(60 \cdot 10^{-4}) = (ax^3 + bx^2 + cx - 60 \cdot 10^{-4}ax^2 - 60 \cdot 10^{-4}bx - 60 \cdot 10^{-4}c) = 0$$

$$\diamond P(60 \cdot 10^{-4}) = ax^3 + (b - 60 \cdot 10^{-4}a)x^2 + (c - 60 \cdot 10^{-4}b)x - 60 \cdot 10^{-4}c = 0 \text{ équation N°2}$$

Avec :

$$\begin{cases} -\lambda^3 + 180 \cdot 10^{-4}\lambda^2 + 72 \cdot 10^{-6}\lambda = 0 \dots\dots\dots \text{équation N°1} \\ ax^3 + (b - 60 \cdot 10^{-4}a)x^2 + (c - 60 \cdot 10^{-4}b)x - 60 \cdot 10^{-4}c = 0 \dots\dots\dots \text{équation N°2} \end{cases}$$

D'appris d'appariement (المطابق طريقة استعمال) :

$$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\bullet a = -1$$

$$\bullet b - 60 \cdot 10^{-4}a = 180 \cdot 10^{-4} \rightarrow b - 60 \cdot 10^{-4}(-1) = 180 \cdot 10^{-4} \rightarrow b = 120 \cdot 10^{-4}$$

$$\bullet 60 \cdot 10^{-4}c = 0 \rightarrow c = 0$$

On peut écrire :

$$\diamond (x + 2,678)(-x^2 + 120 \cdot 10^{-4}x) = 0$$

$$\diamond \begin{cases} (x - 60 \cdot 10^{-4}) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (-x^2 + 120 \cdot 10^{-4}x) = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\triangleright (x - 60 \cdot 10^{-4}) = 0 \rightarrow x_1 = 60 \cdot 10^{-4}$$



➤ $(-x^2 + 120 \cdot 10^{-4}x) = 0$

Équation de 2^m ordre la solution de cette équation est :

$\Delta = b^2 - 4ac$; $\Delta = 144 \cdot 10^{-6} \geq 0$ $\sqrt{\Delta} = 120 \cdot 10^{-4}$.

• $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120 \cdot 10^{-4} - 120 \cdot 10^{-4}}{2(-1)} =$; $x_2 \cong 120 \cdot 10^{-4}$
• $x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120 \cdot 10^{-4} + 120 \cdot 10^{-4}}{2(-1)} =$; $x_3 \cong 0$

Par la convention ces déformations sont numérotées telque : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

Les déformations principales sont : $\varepsilon_1 = 120 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 60 \cdot 10^{-4}$.

- La déformation maximal $\varepsilon_{\max}$

$\varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = 30 \cdot 10^{-4}$

3- Représenté les résultats en utilisant le cercle MOHR.

- Le centre du cercle :

$\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \left(\frac{60 + 120}{2}\right) 10^{-4} = 90 \cdot 10^{-4}$

- Le rayon du cercle :

$r = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \left(\frac{120 - 60}{2}\right) 10^{-4} = 30 \cdot 10^{-4}$

- Les dilatations principales :

$\varepsilon_1 = 120 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 60 \cdot 10^{-4}$

